

Preservación de propiedades para sistemas en tiempo discreto

G. Fernández-Anaya^{†*} J. J. Flores-Godoy^{†**} J. Álvarez-Ramírez[‡]

[†]Departamento de Física y Matemáticas,
Universidad Iberoamericana,
Paseo de la Reforma #880, Lomas de Santa Fe,
México, D. F. 01210, MEXICO

[‡]Departamento de IPH,
Universidad Autónoma Metropolitana,
Iztapalapa, México, D. F., MEXICO

Resumen

Utilizando sustituciones de ciertas funciones racionales (\mathbb{M}_1) por la variable z , se presenta resultados sobre la preservación de propiedades de estabilidad, estabilización, funciones reales positivas (PR), estrictamente reales positivas (SPR), reales acotadas (BR), estrictamente reales acotadas (SBR) y norma \mathcal{H}_{∞} . Basados en estas propiedades se presentan resultados sobre la preservación del lemma sobre funciones SPR y estabilidad absoluta en sistemas discretos singulares lineales invariantes con el tiempo.

1. Introducción

El estudio de sustituciones en el dominio de la frecuencia para sistemas en tiempo discreto no es nuevo, por ejemplo en [2] se utiliza una transformación espectral para filtros digitales y se prueba que dicha transformación (funciones paso-todo) convierte a un filtro paso-bajas en una función de transferencia que tiene el mismo tipo de características en amplitud pero pertenece a una cierta clase de filtro digitales. En [10] se presenta una teoría de transformaciones espectrales para filtros digitales de dos dimensiones. Se prueba que estas transformaciones tienen la forma de funciones paso-todo estables de dos dimensiones y el resultado de esta trasformación es estable. Este resultado se utiliza para obtener nuevos diseños de filtros digitales de dos dimensiones a partir de diseños conocidos. En [6] se establece una técnica de diseño

para filtros digitales con respuesta a impulso infinita (IIR) con simetría circular para el caso de dos dimensiones a partir de filtros digitales de una dimensión, vía una sustitución de la variable z por una función de transferencia de dos dimensiones. En este caso la estabilidad entrada-acotada salida-acotada (BIBO) se preserva si el denominador de la función de transferencia de la sustitución no tiene ceros en el círculo unitario.

En este trabajo varios resultados obtenidos para el caso continuo reportados en [4], son extendidos para sistemas discretos con una entrada una salida (SISO) lineales invariantes con el tiempo (LTI) al utilizar sustituciones por funciones \mathbb{M}_1 .

Se mostrará que la sustituciones de funciones \mathbb{M}_1 por la variable z preservan estabilidad, funciones PR, SPR, BR, SBR y norma \mathcal{H}_{∞} en sistemas discretos SISO LTI. Además, la clase de funciones \mathbb{M}_1 es cerrada para la composición de funciones \mathbb{M}_1 .

Una observación es que las transformaciones espectrales deben ser filtros paso-todo que transforman el círculo unitario a un círculo unitario. Sin embargo, las funciones \mathbb{M}_1 no tienen esta propiedad (Definición 4), en consecuencia las funciones \mathbb{M}_1 son diferentes con respecto a las transformaciones espectrales. Los resultados obtenidos en la preservación de propiedades son utilizados para mostrar que el Lemma SPR y las condiciones de estabilidad robusta para sistemas discretos singulares se preservan cuando se sustituyen funciones \mathbb{M}_1 por la variable z . Estos resultados se pueden interpretar en el sentido de robustez a perturbaciones no lineales en los parámetros de la función de transferencia inducidos por la sustitución de funciones \mathbb{M}_1 . Finalmente, se presentan

* guillermo.fernandez@uia.mx

** job.flores@uia.mx

algunas conclusiones y un ejemplo.

2. Notación y definiciones

En esta sección se presenta la notación y las definiciones utilizadas durante el resto del trabajo.

Notación: Sean \mathbb{R} y \mathbb{C} el campo de números reales y números complejos, respectivamente. Los conjuntos $T = \{z \in \mathbb{C} : |z| > 1\}$, $\partial T = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, $\bar{T} = T \cup \partial T$ y $\bar{T}_c = \bar{T} \cup \{\infty\}$. En este trabajo se estudia el caso de sistemas discretos SISO LTI.

Definición 1 La función racional real $G(z) = \frac{N(z)}{D(z)}$, $z \in \mathbb{C}$, es Schur estable si todas las raíces del polinomio del denominador $D(z)$ se encuentran dentro del círculo unitario $|z| < 1$.

Definición 2 ([1], [7], [9]) Una función racional real (SPR) $G(z)$ es una función estrictamente positiva real si:

1. $G(z)$ es analítica en \bar{T} , es decir, $G(z)$ es estable.
2. $\text{Re}[G(z)] > 0$ para $z \in \bar{T}$.

Para funciones SPR la condición $G(\infty) > 0$ es satisfecha como se prueba en [9].

Definición 3 ([1], [7], [9]) Una función racional real $G(z)$ es una función positiva real si:

1. $G(z)$ es analítica en T .
2. $\text{Re}[G(z)] \geq 0$ para $z \in T$.

Definición 4 Una función racional real con grado relativo cero con numerador y denominador coprimos $G(z)$ se llama una función \mathbb{M}_1 si

1. $G(z)$ es analítica en \bar{T} .
2. $\frac{1}{G(z)}$ es analítica en \bar{T} , es decir, de fase mínima.
3. Para todo $\theta \in [0, 2\pi]$, $|G(e^{j\theta})| > 1$, con $j = \sqrt{-1}$.

Note que para funciones \mathbb{M}_1 se cumple que la ganancia de alta frecuencia es mayor que uno.

Definición 5 Una función racional real $G(z)$ es una función estrictamente acotada real (SBR) si

1. $G(z)$ es analítica en \bar{T} .
2. $\|G(z)\|_{\infty} < 1$, donde $\|G(z)\|_{\infty} := \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |G(e^{j\theta})|$.

En el caso cuando se cumple la primera condición y $\|G(z)\|_{\infty} \leq 1$, se dice que la función $G(z)$ es una función acotada real (BR).

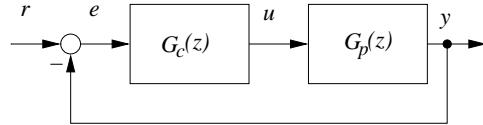


Figura 1: Retroalimentación unitaria. r : señal de referencia, e : señal de error, u : señal de control, y : salida del sistema, $G_c(z)$: Controlador, $G_p(z)$: sistema

3. Resultados de preservación de propiedades por sustitución de funciones \mathbb{M}_1

En esta sección se presentan resultados técnicos que son utilizados en la siguiente sección.

Teorema 6 Si $H(z)$ es una función racional estable y $G(z)$ es una función \mathbb{M}_1 , entonces $H(G(z))$ es una función racional estable. Además la composición de funciones \mathbb{M}_1 con funciones \mathbb{M}_1 es cerrada.

Teorema 7 Si $H(z)$ es una función SPR (PR) y $G(z)$ es una función \mathbb{M}_1 , entonces $H(G(z))$ es una función SPR (PR).

Los teoremas 6 y 7 establecen que para sistemas discretos al sustituir funciones \mathbb{M}_1 por la variable z la propiedades de estabilidad, SPR y PR se preservan. También se establece que la composición de funciones \mathbb{M}_1 con funciones \mathbb{M}_1 es cerrada. Este resultado es similar al que se presenta en [4] para el caso de sistemas en tiempo continuo. Note que la sustitución de funciones SPR por la variable z no preserva estabilidad para sistemas discretos.

Proposición 8 Sea $H(z)$ un función Schur estable, propia y $H(z) \neq 1$ para $z \in \partial T$.

1. Si $H(z)$ es una función SBR y $G(z)$ es una función \mathbb{M}_1 , entonces $H(G(z))$ es una función SBR.
2. Si $H(z)$ es una función BR y $G(z)$ es una función \mathbb{M}_1 , entonces $H(G(z))$ es una función BR.
3. Si $\|H(z)\|_{\infty} \leq \gamma_H$, entonces para cada función $G(z)$ de clase \mathbb{M}_1 , $\|H(G(z))\|_{\infty} \leq \gamma_H$

La proposición 8 establece que la sustitución de funciones \mathbb{M}_1 por la variable z preserva propiedades de SBR, BR y norma \mathcal{H}_{∞} . Esta proposición es similar a la reportada en [5].

Corolario 9 Considere el sistema de control de la figura 1.

1. Si $u(z) = G_c(z)e(z)$ estabiliza al sistema $G_p(z) = \frac{N_p(z)}{D_p(z)}$, es decir que el sistema en lazo cerrado

$$M_c(z) = \frac{G_c(z)G_p(z)}{1 + G_c(z)G_p(z)}$$

es Schur. Entonces, $u(z) = G_c(G(z))y(z)$ estabiliza el sistema resultado de la composición de funciones, esto es,

$$G_p(G(z)) = \frac{N_p(G(z))}{D_p(G(z))}$$

para cada función $G(z)$ de clase \mathbb{M}_1 .

2. Si $u(z) = Ky(z)$, donde K es una constante, estabiliza al sistema $G_p(z) = \frac{N_p(z)}{D_p(z)}$. Entonces,

- a) La misma señal $u(z) = Ky(z)$ hace estable a $M_c(G(z))$ para cada función $G(z)$ de clase \mathbb{M}_1 .
- b) La misma señal $u(z) = Ky(z)$ hace estable a

$$M_c \left(\sum_{i=1}^n a_i G_i(z) \right)$$

donde $G_1(z), \dots, G_n(z)$ son funciones de clase \mathbb{M}_1 y $a_i \geq 1$ para $i = 1, \dots, n$.

Este resultado establece que sustituciones de funciones \mathbb{M}_1 por la variable z preserva la propiedad de estabilización, es decir, el nuevo controlador estabiliza a la nueva planta después de la sustitución. Además, controladores proporcionales estabilizan sistemas con perturbaciones no lineales resultado de la sustitución con funciones \mathbb{M}_1 mientras que los parámetros de las funciones \mathbb{M}_1 varíen de forma continua. Si se cambia el orden de las funciones $G_1(z), \dots, G_n(z)$ de clase \mathbb{M}_1 , entonces se puede interpretar el resultado en es sentido de estabilización simultanea para los sistemas $M_c(G_1(z)), \dots, M_c(G_n(z))$ utilizando un controlador proporcional K .

4. Resultados para sistemas discretos singulares

En esta sección se extienden los resultados del lema sobre funciones SPR [9], [12] y estabilidad absoluta para sistemas con no linealidades estáticas y variantes con el tiempo [8], [9] para el caso de sistemas discretos singulares.

Se consideran sistemas discretos singulares de una entrada una salida (SISO) invariantes con el tiempo

(LTI) cuya representación en variables de estado es

$$\begin{aligned} Ex(k+1) &= Ax(k) + Bw(k) \\ y(k) &= Cx(k) + Dw(k) \end{aligned} \quad (1)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ es el vector de variables de estado del sistema singular, $w \in \mathbb{R}$ es una señal externa de entrada y $y \in \mathbb{R}$ es la salida medida. La matriz $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tiene $\text{rank } E = r \leq n$. Las matrices A , B , C y D son de dimensiones compatibles. El par de matrices (E, A) se usa cuando únicamente el comportamiento del sistema autónomo del sistema (1) es de interés.

Definición 10 [3], [9] Sea el sistema discreto singular dado por (1)

1. El par (E, A) es regular si $\det(zE - A) \neq 0$.
2. El par (E, A) es libre de impulsos si $(zE - A)^{-1}$ es propia.
3. El par (E, A) es admisible si es regular, propia y estable (Schur).

Para un sistema discreto singular regular, la función de transferencia de w a y esta bien definido por

$$T_{yw}(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$$

y la existencia y unicidad de la solución de (1) esta garantizada para cualquier condición inicial. En [3] se prueba que el par (E, A) es regular si y solo si existen dos matrices reales no singulares M y N no necesariamente únicas tales que

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

donde $J \in \mathbb{R}^{(n-r) \times (n-r)}$ es una matriz nilpotente y $A_r \in \mathbb{R}^{r \times r}$ la matriz que determina los valores característicos finitos del la matriz pencil $zE - A$. Haciendo una partición de las matrices MB y CN de la siguiente forma

$$MB = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad CN = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 \end{bmatrix}$$

se tiene que

$$\begin{aligned} T_{yw}(z) &= C(zI - A)^{-1}B + D \\ &= C_1(zI_r - A_r)^{-1}B_1 \\ &\quad + C_2(zJ - I_{n-r})^{-1}B_2 + D \end{aligned}$$

De la definición 10 y de la discusión anterior tenemos que un par regular es libre de impulso si solo sí la matriz $J = 0$. Por lo tanto,

$$MEN = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad MAN = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}$$

y la función de transferencia $T_{yw}(z)$ se simplifica

$$T_{yw}(z) = C_1(zI - A_r)^{-1}B_1 + D - C_2B_2$$

Con esto se tiene una equivalencia entre las representaciones de la el sistema discreto singular regular libre de impulsos de dimensión n , (E, A, B, C, D) , y la representación de estado de dimensión r , $(I_r, A_r, B_1, C_1, D - C_2B_2)$, asociado con la función de transferencia $T_{wy}(z)$. Además, se tiene que la función de transferencia $T_{wy}(z)$ es estable si y solo si la matriz A_r es estable.

En este momento vamos a considerar la sustitución de $G(z)$ de clase \mathbb{M}_1 por la variable z en la función de transferencia $T_{wy}(z)$, de modo

$$\begin{aligned} T_{yw}(G(z)) &= C_1(G(z)I_r - A_r)^{-1}B_1 + D - C_2B_2 \\ &= C_3(zI_{rk} - A_3)^{-1}B_3 + D_3 \end{aligned}$$

donde se ha asociado a la función de transferencia $T_{yw}(G(z))$ una representación de variables de estado de dimensión rk , (I_r, k, A_3, B_3, D_3) con k el orden de $G(z)$. Pero $T_{yw}(G(z))$ también es la representación de algún sistema singular con matrices $\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D}$, esto es, $T_{wy}(z) = \hat{C}(z\hat{E} - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D}$.

Proposición 11

- Si existe una matriz $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que satisface la siguiente desigualdad matricial lineal (LMI)

$$\begin{bmatrix} A^\top PA - E^\top PE + C^\top C & A^\top PB + C^\top D \\ B^\top PA + D^\top C & -\gamma^2 I + B^\top PB + D^\top D \end{bmatrix} < 0$$

y $E^\top PE \geq 0$. Entonces el par (\hat{E}, \hat{A}) es admissible y $\|T_{yw}(G(z))\|_\infty < \gamma$ para cada función $G(z)$ de clase \mathbb{M}_1 .

- Si existe una matriz $P = P^\top \in \mathbb{R}^{n \times n}$ que satisface la siguiente LMI

$$\begin{bmatrix} A^\top PA - E^\top PE & A^\top PB + C^\top \\ B^\top PA + C & -D + D^\top + B^\top PB \end{bmatrix} < 0$$

y $E^\top PE \geq 0$. Entonces el par (\hat{E}, \hat{A}) es admissible y $T_{yw}(G(z))$ es una función SPR para cada $G(z)$ de clase \mathbb{M}_1 .

Esta proposición es una generalización de los teoremas 1 y 3 de [9]. Nuestro resultado garantiza que las propiedades de admisibilidad, norma \mathcal{H}_∞ y SPR se preservan para el par (E, A) (función racional estable $T_{yw}(z)$) cuando se consideran perturbaciones no

lineales en los parámetros inducidas por la sustitución de funciones $G(z)$ de clase \mathbb{M}_1 por la variable z . Observe que las LMI son las mismas utilizadas que en el trabajo original [9].

Se concluye esta sección con una extensión al resultado de estabilidad robusta para sistemas discretos singulares no lineal. Considere la retroalimentación de un sistema discreto singular representado por (1) y la no linealidad

$$w(k) = -\Phi(k, y(k)) \quad (2)$$

donde la no linealidad estática variante con el tiempo $\Phi : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ esta restringida al primer y tercer cuadrante, es decir, satisface las condiciones para todo entero no negativo k

$$\Phi(k, y(k))y(k) \geq 0, \quad \text{para toda } y(k) \in \mathbb{R}^m \quad (3)$$

Estabilidad global uniforme se define a continuación

Definición 12 [9] Consideré el sistema discreto singular descrito en (1) y la retroalimentación definida por (2). El equilibrio $x = 0$ es

- Estable uniformemente sí para cada $\epsilon > 0$ y cualquier tiempo inicial k_0 tal que $\|x(k_0)\| < \delta$ implica $\|x(k)\| < \epsilon$ para toda $k \geq k_0$;
- Globalmente uniformemente asintóticamente estable (GUAS) sí es estable uniformemente y además, para cada par de números positivos ϵ y σ existe $K(\epsilon, \sigma) > 0$ tal que $\|x(k)\| < \epsilon$ para toda $k \geq k_0 + K(\epsilon, \sigma)$ cuando $\|x(k_0)\| < \sigma$.

Corolario 13 Si el par (E, A) es admisible y $T_{yw}(z)$ es SPR, entonces el equilibrio del sistema discreto singular

$$\begin{aligned} \hat{E}x(k+1) &= \hat{A}x(k) + \hat{B}w(k) \\ y(k) &= \hat{C}x(k) + \hat{D}w(k) \end{aligned} \quad (4)$$

con la retroalimentación (2) es estable asintóticamente global uniforme para cada función $G(z)$ de clase \mathbb{M}_1 , donde $T_{yw}(G(z))$ es la función de transferencia del sistema discreto singular $(\hat{E}, \hat{A}, \hat{B}, \hat{C}, \hat{D})$, esto es, $T_{yw}(G(z)) = \hat{C}(z\hat{E} - \hat{A})^{-1}\hat{B} + \hat{D}$.

Este corolario es una generalización del teorema 4 en [9]. Este resultado garantiza que el sistema en lazo cerrado es GUAS para cada función $G(z)$ de clase \mathbb{M}_1 . Por lo tanto, se tiene robustez en la estabilidad del nuevo sistema en lazo cerrado (resultado de sustituir $G(z)$ por la variable z contra variaciones de los parámetros de la planta inducidos por la sustitución y ante cualquier no linealidad estática invariante con

el tiempo Φ que satisfaga las condiciones de sector (3).

A continuación se presenta un ejemplo modificado que aparece en [9].

Ejemplo 14 Consideré el sistema discreto singular descrito por (1) con matrices

$$E = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ -8 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 0 & -4 \\ 7 & -4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 3$$

cuya función de transferencia

$$T_{yw}(z) = 2 \frac{16z^2 + 23z + 9}{8z^2 + 12z + 5}$$

es una función SPR. Como el par (E, A) es admisible y $T_{yw}(z)$ es una función SPR, por el Corolario 13, el punto de equilibrio de un sistema discreto singular descrito por (4), resultado de sustituir cualquier función $G(z)$ de clase M_1 por la variable z en $T_{yw}(z)$, es decir, $T_{yw}(G(z))$ con cualquier retroalimentación no lineal estática variante con el tiempo que cumpla con las condiciones de sector (primer, tercer cuadrante) es GUAS.

5. Conclusiones

En este trabajo se presentan nuevos resultados sobre la preservación de propiedades de funciones PR, SPR, BR, SBR y norma H_∞ en sistemas discretos lineales cuando se sustituyen funciones de clase M_1 por la variable z . Utilizando estos resultados se generaliza el lema de funciones SPR y estabilidad absoluta para el caso de sistemas discretos singulares cuando se sustituyen funciones de clase M_1 por la variable z . Una posible interpretación de estos resultados es en el sentido de robustez contra variaciones no lineales en los parámetros inducidos por la sustitución de funciones M_1 por la variable z al estilo de lo mencionado en [4], [5], [11].

Referencias

- [1] B. D. O. Anderson and S. Vongpanitlerd. *Network analysis and synthesis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1973.

- [2] G. Constantinides. Spectral transformations for digital filters. *Proc. IEE.*, 117:1585–1590, 1970.
- [3] L. Dai. *Singular control systems*. Springer, Berlin, Germany, 1989.
- [4] G. Fernández-Anaya. Preservation of SPR functions by substitutions in SISO plants. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 44(11):2171–2174, 1999.
- [5] G. Fernández-Anaya, J. C. Martínez, V. Kučera, and D. Aguilar-George. MIMO systems properties preservation under SPR substitutions. *IEEE Trans. Circ. Syst. II: Express Briefs*, 51(5):222–227, 2004.
- [6] D. M. Goodman. A design technique for circularly symmetric low-pass filters. *IEEE Trans. ASSP*, 26:209–304, 1978.
- [7] G. C. Goodwin and K. S. Sin. *Adaptive filtering, prediction and control*. Prentice-Hall, NJ, USA, 1984.
- [8] H. K. Khalil. *Nonlinear systems*. Prentice-Hall, NJ, second edition, 1996.
- [9] L. Lee and J. L. Chen. Strictly positive real lemma and absolute stability for discrete-time descriptor system. *IEEE Trans. Circ. Syst. I*, 50(6):788–794, 2003.
- [10] N. A. Pendergrass, S. K. Mitra, and E. I. Jury. Spectral transformations for two-dimensional filter design. *IEEE Trans. Circ. Syst.*, 23:26–35, 1976.
- [11] L. Wang. Robust stability of a class of polynomial families under nonlinearly correlated perturbations. *Syst. Contr. Lett.*, 30:25–30, 1997.
- [12] S. Xu and C. Yang. H_∞ state feedback control for discrete singular systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 45:1405–1409, 2000.